Αλγεβρικες Δομες Ι

Δευτερα 28 Ιανουαριου 2013

Θέμα 1. **1.** **[8]** Έστω G μια ομάδα και $a, b \in G$. Η τάξη ενός στοιχείου $x \in G$ συμβολίζεται με $o(x)$.

(α) Να δείξετε ότι: $o(a^{-1}ba) = o(b)$.

(β) Να δείξετε ότι: $o(ab) = o(ba)$.

2. **[7]** Θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$, και έστω H η υποομάδα της G η οποία παράγεται από το στοιχείο $([6]_{12}, [15]_{18})$.

(α) Να εξεταστεί, αν η ομάδα πηλίκο G/H διαθέτει στοιχείο τάξης 5.

(β) Να υπολογιστεί η τάξη του στοιχείου $([4]_{12}, [3]_{18}) + H$ της ομάδας πηλίκο G/H.

Θέμα 2. **1.** **[8]** Έστω η συμμετρική ομάδα $(S_n, \circ)$ και H οποιαδήποτε υποομάδα της. Να δειχθεί ότι το πλήθος των στοιχείων της H που είναι άρτιες μεταθέσεις, ισούται είτε με την τάξη $o(H)$ της H ή με $o(H)/2$.

2. **[12]** Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας S_7.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(α') Να υπολογιστεί η τάξη της κυκλικής υποομάδας $\langle \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \rangle$.

(β') Να εξεταστεί αν υπάρχει $\rho \in S_7$ έτσι ώστε: $\rho \langle \sigma \rangle \rho^{-1} = \langle \tau \rangle$.

(γ') Να υπολογιστεί η τάξη της τομής $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

Θέμα 3. **1.** **[7.5]** Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της G. Υποθέτουμε ότι η τάξη $o(H)$ της H και ο δείκτης $[G : H]$ της H στην G είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους: $(o(H), [G : H]) = 1$. Αν $x \in G$, τότε να δείξετε ότι: $x \in H$ αν και μόνον αν $x^{o(H)} = e$.

2. **[7.5]** Έστω $n, m \geqslant 2$ δύο φυσικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι η ομάδα $n\mathbb{Z}$ είναι υποομάδα της $m\mathbb{Z}$ αν και μόνον αν το m ένας διαιρέτης του n. Αν $m \mid n$, να προσδιορισθεί η ομάδα πηλίκο $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Θέμα 4. **[15]** Έστω $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρεψίμων 2×2 πινάκων υπεράνω του $\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; ad \neq 0 \right\}$$

είναι μια υποομάδα της $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Να βρεθεί μια κανονική υποομάδα H της G έτσι ώστε:

(α') Η H είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$.

(β') Η ομάδα πηλίκο G/H είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινομενο $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Θέμα 5. **1.** **[10]** Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, και υποθέτουμε οτι κάθε ιδεώδες του R είναι πρώτο. Να δείξετε ότι ο δακτύλιος R είναι σώμα.

2. **[10]** Θεωρούμε τον δακτύλιο $(\mathbb{Z}_{36}, +, \cdot)$.

(α') Να βρεθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Z}_{36}, +)$.

(β') Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{36}$. Ποιά από αυτά είναι πρώτα και ποιά από αυτά είναι μέγιστα;

Θέμα 6. **[20]** Έστω $q \in \mathbb{Q}$ ένας ρητός αριθμός. Θεωρούμε το σύνολο

$$R_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ qb & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

1. Να δείξετε ότι το σύνολο R_q είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

2. Να δείξετε ότι ο δακτύλιος R_q είναι σώμα αν και μόνον αν δεν υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε: $q = r^2$.

3. Αν $q = 0$, να βρείτε ένα ιδεώδες I του R_0 έτσι ώστε $R_0/I \cong \mathbb{Q}$.

4. Έστω $q = -1$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}(i) = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$, και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων: $R_{-1} \cong \mathbb{Q}(i)$.

Καλή Επιτυχία!